Quadrature du cercle

1S

Fiche Professeur

Auteur : Pierre Lapôtre

But de l'activité : On sait que construire à la règle et au compas un carré ayant l'aire π du cercle-unité est impossible. Dans cette activité est proposée la construction d'un carré dont l'aire est voisine de π. L'aire de ce carré est évaluée par le logiciel de géométrie utilisé, puis retrouvée de manière exacte par le calcul.

Un point d'histoire des mathématiques : En 1882, le mathématicien allemand Ferdinand von Lindemann démontre la transcendance de π. En appliquant ensuite un théorème de Pierre-Laurent Wantzel (1837), il peut conclure que le problème de la quadrature du cercle n'a pas de solution : il est impossible de construire à la règle et au compas un carré dont l'aire soit celle du cercle unité, soit π.

Pré-requis :

- ✓ équation d'une droite passant par 2 points
- ✓ théorème de Pythagore
- ✓ équation d'une droite de coefficient directeur donné passant par un point
- ✓ coordonnées du milieu d'un segment
- ✓ relation entre hauteur et côtés dans un triangle rectangle
- ✓ Savoir-faire : utiliser un logiciel de géométrie dynamique comme « GeoGebra »

Matériels utilisés :

- ✓ salle informatique
- ✓ ordinateurs équipés de « GeoGebra » ou analogue.

Durée indicative : 1 heure

Noms des logiciels utilisés : « GeoGebra » ou analogue et calculette ou logiciel de calcul numérique

Documents utiles à télécharger :

- ✓ Fiche Élève
- ✓ Fichier « Quadrature » (fichier ggb, pour les professeurs)

Niveau de difficulté : Normal voire facile, la construction ne pose pas de problème, la démonstration pas davantage.

Solution :

1 - L'aire c du carré donnée par « GeoGebra » vérifie $3,1415919 < c < 3,1415920 < 3,1415926 < \pi < 3,1415927$. Si on prend c comme valeur approchée de π, c'est une valeur approchée par défaut et l'erreur d'approximation est $< 8 \cdot 10^{-7}$.

2 - Équation de la droite (OD) : $y = -2,6x + 2,6$; abscisse de E : $\sqrt{5,84}$; équation de la droite (EF) : $y = -2,6x + 2,6\sqrt{5,84}$; ordonnée de F : $2,6\sqrt{5,84}$; ordonnée de G : $1,3\sqrt{5,84}$.

3 - On peut démontrer que $AL^2 = OA \times AH$ à partir de l'égalité des angles aigus $\widehat{AHL}$ et $\widehat{ALO}$, en égalant leurs tangentes. Une variante consiste à utiliser le théorème de Pythagore dans les triangles OHL, OAL, ALH et à développer $OH^2 = (AH + AO)^2$. $AL = \sqrt{1,3\sqrt{5,84}}$.

4 - $c = 1,3\sqrt{5,84}$.

Références :

Théorie des corps, la règle et le compas, de J.C. Carrega, Hermann, ISBN 2 7056 1402 8 (page 93).

Quadrature du cercle, article de l'encyclopédie en ligne Wikipedia

http://fr.wikipedia.org/wiki/Quadrature_du_cercle

Programme de mathématiques, cycle terminal de la série scientifique, classe de Première

http://media.education.gouv.fr/file/special_9/21/1/mathsS_155211.pdf