

# Pavages du plan avec des polygones

TS

Auteur : PL

## Fiche Professeur

**But de l'activité :** Après avoir rappelé le pavage du plan par des triangles et des quadrilatères, on s'intéresse au résultat obtenu avec des pentagones particuliers. L'utilisation des nombres complexes permet de démontrer quelques propriétés.

### Compétences engagées :

- ✓ Géométrie plane, transformations.
- ✓ Nombres complexes et géométrie.
- ✓ Usage d'un logiciel de géométrie dynamique.

### Pré-requis :

- ✓ Constructions géométriques.
- ✓ Affixe d'un point, écriture complexe d'une transformation.

### Matériels utilisés :

- ✓ Papier, crayon, matériel de dessin.
- ✓ Un ordinateur muni d'un logiciel de géométrie dynamique.
- ✓ Imprimante.

**Durée indicative :** 1 heure.

**Nom du logiciel utilisé :** GeoGebra.

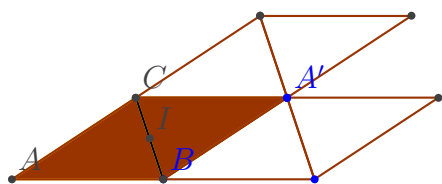
### Documents utiles à télécharger :

- ✓ fiche GeoGebra : pavagePentagones.ggb

**Déroulement de la séance :** En salle informatique, suivre la fiche Élève.

### Première partie : pavage du plan avec des triangles

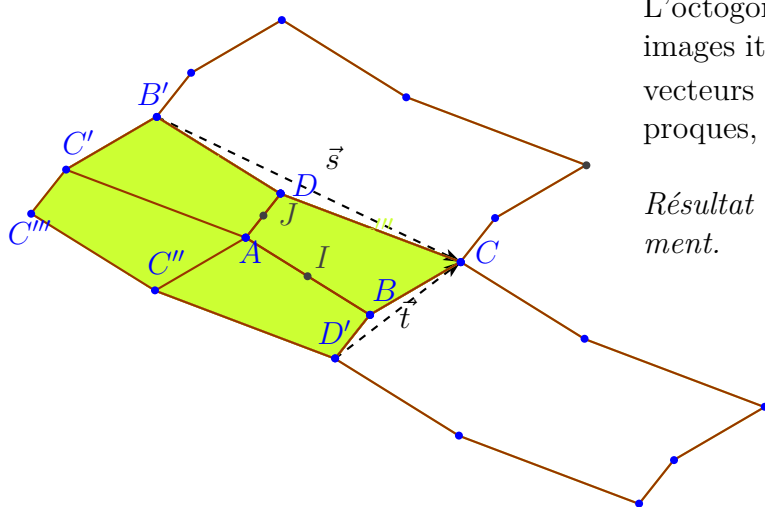
La réunion des triangles  $ABC$  et  $A'CB$  crée un motif : le parallélogramme  $ABA'C$ .



On admet comme une évidence que les images itérées de ce quadrilatère par les translations de vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  et leurs translations réciproques, permettent de paver le plan.

*Ce résultat admis pourra éventuellement être illustré par une application GeoGebra, qui ne constituera évidemment pas une preuve.*

### Première partie : pavage du plan avec des quadrilatères



L'octogone  $BCDB'C'C''C''D'$  crée un motif. Les images itérées de ce motif, par les translations de vecteurs  $\overrightarrow{D'C}$  et  $\overrightarrow{B'C}$  et leurs translations réciproques, permettent de paver le plan.

*Résultat admis, même remarque que précédemment.*

**Démonstration des égalités vectorielles :**  $ADBD'$  est un parallélogramme, ainsi que  $C'BCB'$  et  $C''ACB$ , parce que ses diagonales se coupent en leur milieu, donc  $\overrightarrow{D'B} = \overrightarrow{AD}$ . Dans le triangle

$CC'C'''$ ,  $\frac{CJ}{CC'} = \frac{CA}{CC''} = \frac{1}{2}$ , donc, d'après le théorème de Thalès,  $\frac{AJ}{C'''C'} = \frac{1}{2}$ , dont on déduit que

$$\overrightarrow{C'''C'} = 2\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{D'B}$$

ce qui prouve que  $C'''D'BC'$  est un parallélogramme. Nous savons déjà que  $C'BCB'$  est aussi un parallélogramme. Il en résulte que

$$\overrightarrow{C'''D'} = \overrightarrow{C'B} = \overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{s} \quad (1)$$

On sait que  $\overrightarrow{C'''A} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C'B'}$  (parce que  $C''ACB$  et  $C'B'CB$  sont des parallélogrammes) et que  $\overrightarrow{C'''C'} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{D'B}$  (parce que  $C'''C'BD'$  et  $C'B'CB$  sont des parallélogrammes). On en déduit que

$$\overrightarrow{C'''B'} = \overrightarrow{C'''D} = \overrightarrow{D'C} = \overrightarrow{t} \quad (2)$$

Les égalités (1) et (2) expliquent pourquoi on peut recouvrir le plan en translatant le motif suivant  $\overrightarrow{t}$  et  $\overrightarrow{s}$ , sans chevauchement.

## Deuxième partie : pavage du plan avec des pentagones

2. L'affixe de  $A_1$  est  $(1 - i)e^{i\alpha} + i$ ; celle de  $O_1$  est  $i + e^{i\alpha}$ .

3. Affixe de  $A_2 : i((1 - i)e^{i\alpha} + i) = (i + 1)e^{i\alpha} - 1$ , de  $O_2 : i(i + e^{i\alpha}) = ie^{i\alpha} - 1$ , de  $B_1 : -1$ .

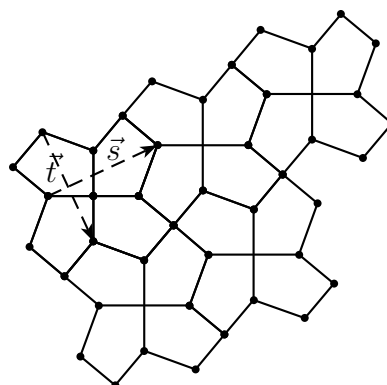
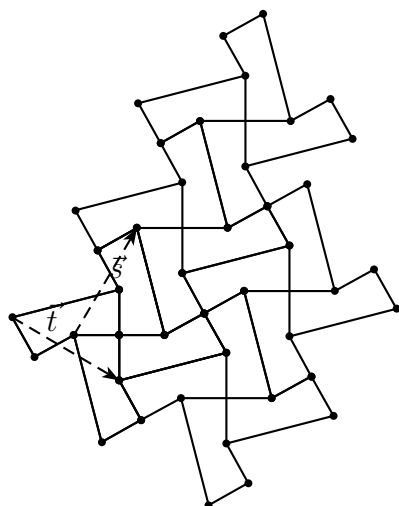
Les points  $A_3, O_3$  et  $B_2$  sont les symétriques par rapport à  $O$  des points  $A_1, O_1$  et  $B$ . Ils ont donc des affixes opposées; de même, les affixes de  $A_4, O_4$  et  $B_3$  sont les opposées des affixes de  $A_2, O_2$  et  $B_1$ .

L'affixe de  $\overrightarrow{B_1A_1}$  est égal à  $i$  fois l'affixe de  $\overrightarrow{A_2B_2}$ . L'angle  $(\overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{B_1A_1})$  est donc  $+\frac{\pi}{2}$ . Il vaut mieux remarquer que  $\overrightarrow{A_2B_2}$  est l'image de  $\overrightarrow{A_1B_1}$  dans la rotation  $r$ .

Il suffit de constater que la somme de l'affixe de  $\overrightarrow{B_1A_1}$  et de l'affixe de  $O_2$  est l'affixe de  $O_1$ . De même pour les autres points.

Les 3 premières égalités montrent que par translation de vecteur  $\overrightarrow{B_1A_1}$ , la ligne brisée  $O_2B_1A_3O_3$  a pour image  $O_1A_1AO_4$ . En répétant indéfiniment cette translation et son inverse sur le motif M et ses images, on obtient une bande du pavage sans chevauchement. Même chose pour la translation de vecteur  $\overrightarrow{A_2B_2}$ , ce qui justifie intuitivement le pavage.

Les deux exemples ci-dessus correspondent à deux valeurs différentes de  $\alpha$ . Plus précisément,  $\alpha = 119^\circ$ , puis  $\alpha = 50^\circ$  (voir ci-dessous ce qui concerne le passage en degrés).



Pour l'application TICE qui suit, il est peut-être plus commode d'utiliser le degré comme unité d'angle.

Il faut noter l'intérêt du cas particulier où  $\alpha$  correspond un angle obtus, ce qui donne un pentagone concave non croisé.

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, créer les points  $O$ ,  $A$  et  $B$ . Définir l'angle  $\alpha$  soit sous forme de curseur ou de paramètre.

Compléter la figure pour obtenir successivement le pentagone  $P$ , les images itérées du pentagone  $P$  par  $r$  :  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  et le dodécagone  $M$ .

Construire les images de  $M$  par les translations définies ci-dessus pour illustrer la propriété énoncée. Penser enfin à déplacer (ou faire varier) l'angle  $\alpha$ . On pourra, à cette occasion, modifier l'intervalle dans lequel évolue  $\alpha$ , par exemple  $[0; 2\pi]$  (et observer).

**Remarque :** lorsque  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ , les pentagones obtenus donnent le *pavage du Caire*. On peut alors demander de calculer les longueurs des côtés du pentagone  $P$ , la mesure de ses angles, son aire.

