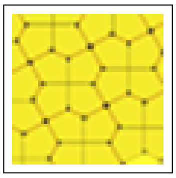


Pavages du plan avec des polygones

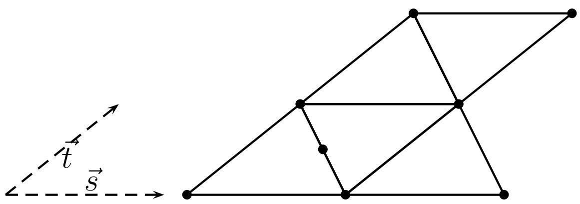
TS

Auteur : PL

Fiche Élève

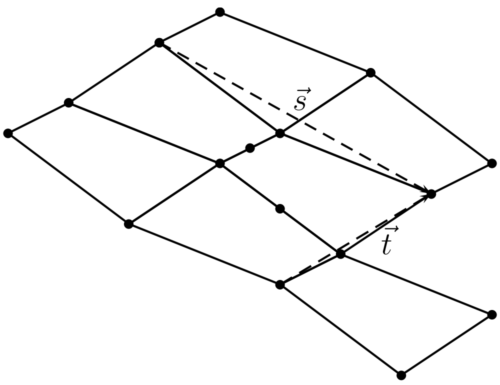
Première partie : d'abord avec des triangles et des quadrilatères

Dans le plan, on considère un triangle quelconque ABC. On nomme I, le milieu de $[BC]$. La symétrie centrale, de centre I, transforme le triangle ABC en le triangle $A'CB$. La réunion de ABC et de son image $A'CB$ crée un motif, ici un parallélogramme $ABA'C$.



Les images itérées de ce motif, par les translations de vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et leurs translations réciproques, permettent de paver le plan, c'est-à-dire de le recouvrir sans chevauchement.
Compléter la figure ci-contre en nommant les points A, B, C, I et A'. Colorier le parallélogramme $ABA'C$. Indiquer, éventuellement en complétant le dessin, les images de $ABA'C$ par les translations de vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On considère maintenant un quadrilatère quelconque $ABCD$. I et J sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[AD]$.



La symétrie centrale, de centre I, transforme le quadrilatère $ABCD$ en $BAC''D'$. La symétrie centrale, de centre J, transforme le quadrilatère $ABCD$ en $DB'C'A$. La symétrie centrale, de centre A, transforme C en C'''. L'octogone $BCDB'C'C'''C''D'$ crée un motif. Les images itérées de ce motif, par les translations de vecteurs $\overrightarrow{D'C}$ et $\overrightarrow{B'C}$ et leurs translations réciproques, permettent de paver le plan.
Compléter la figure ci-contre en nommant les points $A, B, C, D, I, J, B', C', D', C''$ et C'''.
Justifier les égalités vectorielles $\overrightarrow{C'''D'} = \overrightarrow{C'B} = \overrightarrow{B'C}$ et $\overrightarrow{C'''B'} = \overrightarrow{C''D} = \overrightarrow{D'C}$.

Colorier l'octogone $BCDB'C'C'''C''D'$. Indiquer, éventuellement en complétant le dessin, les images de $BCDB'C'C'''C''D'$ par les translations de vecteurs $\overrightarrow{D'C} = \vec{t}$ et $\overrightarrow{B'C} = \vec{s}$.

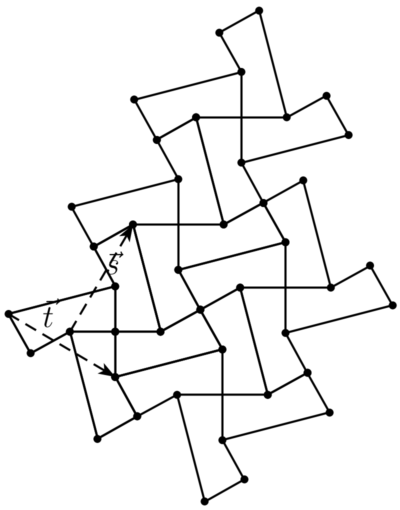
Deuxième partie : avec des pentagones

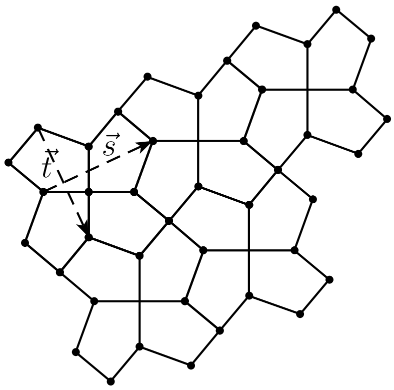
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. α est un réel de l'intervalle $]0; \pi[$.
On considère les points A et B, d'affixes respectives 1 et i.

- A_1 est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle α.
- O_1 est l'image de O par la rotation de centre B et d'angle $\alpha + \dfrac{\pi}{2}$.

On note P, le pentagone OAA_1O_1B.

1. Construire à la main, sur une feuille de papier, le pentagone P. La figure obtenue sera complétée au fur et à mesure.
2. Trouver les affixes des sommets de P.
3. On nomme r, le quart de tour direct de centre O. P_1 est l'image de P par r, P_2 celle de P_1 par r et P_3 celle de P_2 par r.
   La réunion de ces quatre pentagones crée un motif M, polygone à douze côtés (dodécagone), qui permet de paver le plan.
   Donner les affixes des points suivants : $A_2 = r(A_1)$, $O_2 = r(O_1)$, $B_1 = r(B)$, $A_3 = r(A_2)$, $O_3 = r(O_2)$, $B_2 = r(B_1)$, $A_4 = r(A_3)$ et $O_4 = r(O_3)$.
   Évaluer l'angle $(\overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{B_1A_1})$.
   Vérifier que la translation de vecteurs $\overrightarrow{B_1A_1}$, transforme O_2 en O_1, A_3 en A et O_3 en O_4.
   Vérifier que la translation de vecteurs $\overrightarrow{A_2B_2}$, transforme O_2 en O_3, B en A_4 et O_1 en O_4. Conclure.





   Les deux exemples ci-dessus correspondent à deux valeurs différentes de α.
4. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, créer les points O, A et B. Définir l'angle α soit sous forme de curseur ou de paramètre.
   Compléter la figure pour obtenir successivement le pentagone P, les images itérées de P par r : P_1, P_2, P_3 et le dodécagone M.
   Construire les images de M par les translations définies ci-desssus pour illustrer la propriété énoncée.
   Penser enfin à déplacer (ou faire varier) l'angle α. On pourra, à cette occasion, modifier l'intervalle dans lequel évolue α, par exemple $[0; 2\pi]$.

   Remarque : lorsque $\alpha = \frac{\pi}{6}$, les pentagones obtenus donnent le *pavage du Caire*.